Απειροστικός III – Φυλλάδιο Ασκήσεων 6

Άσκηση 1. *Δίνονται οι παραμετρικοποιημένες επιφάνειες:*

$$\Phi(u,v) = (u^2, u\sin e^v, \frac{1}{3}u\cos e^v), \qquad \Phi(u,v) = (u^2 - v^2, u+v, u^2+4v), \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Είναι ομαλές; Στα σημεία που είναι ομαλές, βρείτε τις γενικές εξισώσεις των εφαπτομένων επιπέδων τους.

Άσκηση 2. *Βρείτε τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα των παρακάτω επιφανειών και σχεδιάστε τες:*

(i) $x = \cos v \sin u$, $y = \sin v \sin u$, $z = \cos u$, $u \in [0,\pi]$, $v \in [0,2\pi]$.

(ii) $x = 3\cos v \sin u$, $y = 2\sin v \sin u$, $z = \cos u$, $u \in [0,\pi]$, $v \in [0,2\pi]$.

(iii) $x = \sin v$, $y = u$, $z = \cos v$, $v \in [0,2\pi]$, $u \in [-1,3]$.

Άσκηση 3. *Βρείτε τα εμβαδά των επιφανειών που ορίζονται από τις σχέσεις:*

(i) $z = xy$, $x^2 + y^2 \le 2$.

(ii) $x = (R + \cos\phi)\cos\theta$, $y = (R+\cos\phi)\sin\theta$, $z = \sin\phi$, $\theta \in [0,2\pi]$, $\phi \in [0,2\pi]$, $R > 1$ *(σταθερό).*

(iii) $z \ge \sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2+z^2 = 1$.

Άσκηση 4. *Υπολογίστε τα επιφανειακά ολοκληρώματα:*

(i) $\int_S x + z dS$, *όπου* $S = \{y^2 + z^2 = 4,\ x \in [0,5]\}$.

(ii) $\int_S z dS$, *όπου* $S = \{z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},\ x^2+y^2 \le R^2\}$.

(iii) $\int_S 3x - 2y + z dS$, *όπου* $S = \{2x + 3y + z = 6,\ x,y,z \ge 0\}$.

Άσκηση 5. *Υπολογίστε τα επιφανειακά ολοκληρώματα* $\int\int_S F \cdot dS$ *για:*

(i) $F = (2x, 2y, z)$ *και* S *το γράφημα της* $z = 1 - x^2 - y^2$ *για* $x^2 + y^2 \le 1$ *ένωση τον μοναδιαίο δίσκο στο επίπεδο* xy *με κέντρο το* 0.

(ii) $F = (x, y, z^2)$ *και* S *με παραμετρικοποίηση* $\Phi(u,v) = (2\sin u, 3\cos u, v)$, $u \in [0,2\pi]$, $v \in [0,1]$.

Άσκηση 6. *Υπολογίστε τα επιφανειακά ολοκληρώματα:*

(i) $\int\int_S (\nabla \times F) \cdot dS$, *όπου* $S = \{x^2+y^2+3z^2 = 1,\ z \le 0\}$ *και* $F = (y, -x, zx^3y^2)$.

(ii) $\int\int_S (F \cdot n) dS$, *όπου* $F = (1, 1, z(x^2+y^2)^2)$, $S = \{x^2+y^2 = 1,\ z \in [0,1]\}$, *και* n *το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της* S.